

(1) az ellipszis a sugarú körből történő zsugorításával való előállítási módjából következik.

Az 1. ábra alapján írhatjuk, hogy:

$$\overline{AA_1} = m \cdot \sin \delta ; \sin \delta = \frac{s}{n} \rightarrow \overline{AA_1} = \frac{m}{n} \cdot s . \quad (2)$$

Most az $\mathbf{OB_0B_1}$ derékszögű háromszögből *Pitagorász* tételével:

$$a^2 = s^2 + \overline{B_0B_1}^2 ; \quad (3)$$

most (1 / 1) -ből:

$$\overline{B_0 \cdot B_1} = \frac{a}{b} \cdot \overline{BB_1} ; \quad (4)$$

majd az 1. ábra $\mathbf{OBB_1}$ derékszögű háromszögéből:

$$\overline{BB_1} = \sqrt{n^2 - s^2} . \quad (5)$$

Ezután (3), (4) és (5) - tel:

$$\begin{aligned} a^2 &= s^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \cdot \overline{BB_1}^2 = s^2 + \frac{a^2}{b^2} \cdot (n^2 - s^2) , \text{ tehát:} \\ \underline{a^2 &= s^2 + \frac{a^2}{b^2} \cdot n^2 - \frac{a^2}{b^2} \cdot s^2 .} \end{aligned} \quad (6)$$

Most az $\mathbf{OA_0A_1}$ derékszögű háromszögből, (1 / 2) és (2) - vel is:

$$\begin{aligned} a^2 &= \left[m^2 - \left(\frac{m}{n} \cdot s \right)^2 \right] + \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} \cdot s \right)^2 , \text{ innen:} \\ \underline{a^2 &= m^2 - \frac{m^2}{n^2} \cdot s^2 + \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{m^2}{n^2} \cdot s^2 .} \end{aligned} \quad (7)$$

Most (6) - ot végigszorozzuk az $\frac{m^2}{n^2}$ tényezővel:

$$\frac{m^2}{n^2} \cdot a^2 = \frac{m^2}{n^2} \cdot s^2 + \frac{a^2}{b^2} \cdot n^2 \cdot \frac{m^2}{n^2} - \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{m^2}{n^2} \cdot s^2 , \quad (8)$$

majd (7) és (8) összeadásával:

$$\begin{aligned} a^2 + \frac{m^2}{n^2} \cdot a^2 &= m^2 - \frac{m^2}{n^2} \cdot s^2 + \frac{m^2}{n^2} \cdot s^2 + \frac{a^2}{b^2} \cdot n^2 \cdot \frac{m^2}{n^2} - \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{m^2}{n^2} \cdot s^2 + \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{m^2}{n^2} \cdot s^2 , \\ a^2 + \frac{m^2}{n^2} \cdot a^2 &= m^2 + \frac{a^2}{b^2} \cdot n^2 \cdot \frac{m^2}{n^2} , \\ a^2 \cdot n^2 + m^2 \cdot a^2 &= m^2 \cdot n^2 + \frac{a^2}{b^2} \cdot m^2 \cdot n^2 , \\ a^2 \cdot b^2 \cdot n^2 + m^2 \cdot a^2 \cdot b^2 &= m^2 \cdot n^2 \cdot b^2 + a^2 \cdot m^2 \cdot n^2 , \\ a^2 \cdot b^2 \cdot (m^2 + n^2) &= m^2 \cdot n^2 \cdot (a^2 + b^2) , \end{aligned}$$

$$\frac{m^2 + n^2}{m^2 \cdot n^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 \cdot b^2} , \quad (9^*)$$

$$\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = konst. \quad (9)$$

Ismét az 1. ábráról:

$$\sin \alpha = \frac{r}{m} , \quad \sin \beta = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha = \frac{r}{n} , \quad \text{innen:}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{r}{m}\right)^2 + \left(\frac{r}{n}\right)^2 = 1 \rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} . \quad (10)$$

Most (9) és (10) - zel:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 \cdot b^2} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a \cdot b} \rightarrow \underline{\underline{r = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}} , \quad (11)$$

a tétel állításával egyezésben.

Az 1. ábrán berajzoltuk az **O** - ból szintén derékszögben látszó **EF** szakaszt is, mely szintén érinti az **O** középpontú, **r** sugarú (piros szaggatott vonallal berajzolt) mondott kört.

Megjegyzések:

M1. Az 1. ábra az [1] - beli eredetije alapján készült, kisebb kiegészítésekkel.

M2. Annak érdekében, hogy elkerüljünk bizonyos tévutakat, kiszámítjuk a **AB = d** távolság, valamint a **T_{OAB}** háromszög - terület alakulását a **δ** szög függvényében.

Az **A** pont rajta van az ellipszisen, így koordinátái között fennáll az alábbi implicit kapcsolat:

$$\left(\frac{x_A}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_A}{b}\right)^2 = 1 . \quad (12)$$

Az 1. ábra szerint írhatjuk, hogy:

$$x_A = m \cdot \cos \delta , \quad y_A = m \cdot \sin \delta . \quad (13)$$

Most (12) és (13) - mal:

$$\begin{aligned} m^2 \cdot \frac{\cos^2 \delta}{a^2} + m^2 \cdot \frac{\sin^2 \delta}{b^2} &= 1 \rightarrow m^2 \cdot \left(\frac{\cos^2 \delta}{a^2} + \frac{\sin^2 \delta}{b^2} \right) \rightarrow \\ m^2 \cdot \frac{a^2 \cdot \sin^2 \delta + b^2 \cdot \cos^2 \delta}{a^2 \cdot b^2} &= 1 \rightarrow m^2 = \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 \cdot \sin^2 \delta + b^2 \cdot \cos^2 \delta} , \quad \text{innen:} \\ m &= \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 \cdot \sin^2 \delta + b^2 \cdot \cos^2 \delta}} . \end{aligned} \quad (14)$$

A **B** pont is rajta van az ellipszisen, így (14) - gyel is:

$$n(\delta) = m(\delta + 90^\circ) = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 \cdot \sin^2(\delta + 90^\circ) + b^2 \cdot \cos^2(\delta + 90^\circ)}} ; \quad (15)$$

felhasználva, hogy:

$$\sin(\delta + 90^\circ) = \cos \delta , \quad \cos(\delta + 90^\circ) = -\sin \delta , \quad (16)$$

(15) és (16) - tal kapjuk, hogy:

$$n(\delta) = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \delta + b^2 \cdot \sin^2 \delta}} . \quad (17)$$

Az **AB** = **d** jelöléssel és *Pitagorász* tételével:

$$d^2 = m^2 + n^2 ; \quad (18)$$

most (14), (17) és (18) - cal:

$$\begin{aligned} d^2 &= \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 \cdot \sin^2 \delta + b^2 \cdot \cos^2 \delta} + \frac{a^2 \cdot b^2}{a^2 \cdot \cos^2 \delta + b^2 \cdot \sin^2 \delta} \downarrow \\ d^2 &= a^2 \cdot b^2 \cdot \left(\frac{1}{a^2 \cdot \sin^2 \delta + b^2 \cdot \cos^2 \delta} + \frac{1}{a^2 \cdot \cos^2 \delta + b^2 \cdot \sin^2 \delta} \right) . \end{aligned} \quad (19)$$

A (19) - ben szereplő zárójeles tényezőt tovább alakítjuk:

$$\frac{1}{a^2 \cdot \sin^2 \delta + b^2 \cdot \cos^2 \delta} + \frac{1}{a^2 \cdot \cos^2 \delta + b^2 \cdot \sin^2 \delta} = \frac{a^2 \cdot \cos^2 \delta + b^2 \cdot \sin^2 \delta + a^2 \cdot \sin^2 \delta + b^2 \cdot \cos^2 \delta}{(a^2 \cdot \sin^2 \delta + b^2 \cdot \cos^2 \delta) \cdot (a^2 \cdot \cos^2 \delta + b^2 \cdot \sin^2 \delta)} ; \quad (20 / 1)$$

azaz:

$$\frac{a^2 \cdot \cos^2 \delta + b^2 \cdot \sin^2 \delta + a^2 \cdot \sin^2 \delta + b^2 \cdot \cos^2 \delta}{(a^2 \cdot \sin^2 \delta + b^2 \cdot \cos^2 \delta) \cdot (a^2 \cdot \cos^2 \delta + b^2 \cdot \sin^2 \delta)} = \frac{S}{N} ; \quad (20 / 2)$$

a számláló:

$$\begin{aligned} S &= a^2 \cdot \cos^2 \delta + b^2 \cdot \sin^2 \delta + a^2 \cdot \sin^2 \delta + b^2 \cdot \cos^2 \delta = \\ &= a^2 \cdot (\sin^2 \delta + \cos^2 \delta) + b^2 \cdot (\sin^2 \delta + \cos^2 \delta) = a^2 + b^2 , \text{ tehát:} \\ S &= a^2 + b^2 ; \end{aligned} \quad (20 / 3)$$

a nevező:

$$\begin{aligned} N &= (a^2 \cdot \sin^2 \delta + b^2 \cdot \cos^2 \delta) \cdot (a^2 \cdot \cos^2 \delta + b^2 \cdot \sin^2 \delta) = \\ &= a^4 \cdot \sin^2 \delta \cdot \cos^2 \delta + a^2 \cdot b^2 \cdot \cos^4 \delta + a^2 \cdot b^2 \cdot \sin^4 \delta + b^4 \cdot \sin^2 \delta \cdot \cos^2 \delta , \\ N &= \sin^2 \delta \cdot \cos^2 \delta \cdot (a^4 + b^4) + a^2 \cdot b^2 \cdot (\sin^4 \delta + \cos^4 \delta) ; \end{aligned} \quad (20 / 4)$$

mivel:

$$1 = \sin^2 \delta + \cos^2 \delta \rightarrow 1 = (\sin^2 \delta + \cos^2 \delta)^2 \rightarrow$$

$$1 = \sin^4 \delta + \cos^4 \delta + 2 \cdot \sin^2 \delta \cdot \cos^2 \delta \rightarrow$$

$$\sin^4 \delta + \cos^4 \delta = 1 - 2 \cdot \sin^2 \delta \cdot \cos^2 \delta ; \quad (20 / 5)$$

most (20 / 4) és (20 / 5) - tel:

$$N = \sin^2 \delta \cdot \cos^2 \delta \cdot (a^4 + b^4) + a^2 \cdot b^2 \cdot (1 - 2 \cdot \sin^2 \delta \cdot \cos^2 \delta) =$$

$$= a^2 \cdot b^2 + \sin^2 \delta \cdot \cos^2 \delta \cdot (a^4 - 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + b^4) =$$

$$= a^2 \cdot b^2 + (a^2 - b^2)^2 \cdot \sin^2 \delta \cdot \cos^2 \delta = a^2 \cdot b^2 \cdot \left[1 + \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^2 \cdot b^2} \cdot \sin^2 \delta \cdot \cos^2 \delta \right] =$$

$$= a^2 \cdot b^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{a^2 - b^2}{a \cdot b} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sin 2\delta}{2} \right)^2 \right] = a^2 \cdot b^2 \cdot \left\{ 1 + \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right)^2 \cdot \left[\frac{\sin(2\delta)}{2} \right]^2 \right\} =$$

$$= a^2 \cdot b^2 \cdot \left\{ 1 + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \cdot \sin(2\delta) \right]^2 \right\}, \text{ tehát:}$$

$$N = a^2 \cdot b^2 \cdot \left\{ 1 + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \cdot \sin(2\delta) \right]^2 \right\}. \quad (20 / 6)$$

Majd (20 / 2), (20 / 3) és (20 / 6) - tal:

$$\frac{1}{a^2 \cdot \sin^2 \delta + b^2 \cdot \cos^2 \delta} + \frac{1}{a^2 \cdot \cos^2 \delta + b^2 \cdot \sin^2 \delta} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 \cdot b^2 \cdot \left\{ 1 + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \cdot \sin(2\delta) \right]^2 \right\}} ; \quad (20 / 7)$$

ezután (19) és (20 / 7) - tel:

$$d^2 = \frac{a^2 + b^2}{1 + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \cdot \sin(2\delta) \right]^2} \rightarrow d = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \cdot \sin(2\delta) \right]^2}},$$

tehát:

$$d(\delta) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \cdot \sin(2\delta) \right]^2}}. \quad (21)$$

A következő részfeladat a T_{OAB} háromszög - terület meghatározása, általában.

Ismét az 1. ábra alapján:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot n ; \quad (22)$$

most (14), (17), (20 / 2) és (22) szerint:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 \cdot \sin^2 \delta + b^2 \cdot \cos^2 \delta}} \cdot \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 \cdot \cos^2 \delta + b^2 \cdot \sin^2 \delta}},$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a \cdot b)^2}{\sqrt{(a^2 \cdot \sin^2 \delta + b^2 \cdot \cos^2 \delta) \cdot (a^2 \cdot \cos^2 \delta + b^2 \cdot \sin^2 \delta)}} ; \quad (23)$$

majd (20 / 6) és (23) - mal:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a \cdot b)^2}{\sqrt{a^2 \cdot b^2 \cdot \left\{ 1 + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \cdot \sin(2 \cdot \delta) \right]^2 \right\}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot b}{\sqrt{1 + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \cdot \sin(2 \cdot \delta) \right]^2}},$$

tehát:

$$T(\delta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot b}{\sqrt{1 + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \cdot \sin(2 \cdot \delta) \right]^2}}. \quad (24)$$

A (21) és a (24) képleteket átírjuk; a bennük szereplő tört nevezője $a \neq b$ esetén akkor a legkisebb, ha

$$\sin(2 \cdot \delta) = 0 \rightarrow \delta_{1,0} = 0^\circ, \delta_{2,0} = 90^\circ, \delta_{3,0} = 180^\circ, \delta_{4,0} = 270^\circ. \quad (25)$$

Ha a rögzített számlálójú tört nevezője a legkisebb, akkor a tört értéke a legnagyobb, ezért

$$d(\delta) = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{1 + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \cdot \sin(2 \cdot \delta) \right]^2}} = d_{max} \cdot f(\delta), \quad (26 / 1)$$

$$d_{max} = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad f(\delta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \cdot \sin(2 \cdot \delta) \right]^2}}; \quad (26 / 2)$$

valamint:

$$T(\delta) = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \cdot \sin(2 \cdot \delta) \right]^2}} = T_{max} \cdot f(\delta), \quad (27 / 1)$$

$$T_{max} = \frac{a \cdot b}{2}, \quad f(\delta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \cdot \sin(2 \cdot \delta) \right]^2}}. \quad (27 / 2)$$

A (26) és a (27) képletek alapján írhatjuk, hogy:

$$\frac{d(\delta)}{d_{max}} = \frac{T(\delta)}{T_{max}} = f(\delta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \cdot \sin(2 \cdot \delta) \right]^2}}. \quad (28)$$

A (28) képletsor aláhúzott része pontosan ugyanazt fejezi ki, mint ami a (9)* képletből adódik:

$$\frac{m^2 + n^2}{m^2 \cdot n^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 \cdot b^2} \rightarrow \frac{d^2}{4 \cdot T^2} = \frac{d_0^2}{4 \cdot T_0^2} \rightarrow \frac{d^2}{d_0^2} = \frac{T^2}{T_0^2} \rightarrow \underline{\underline{\frac{d}{d_0} = \frac{T}{T_0}}}, \quad (29 / 1)$$

$$d_0 = d(\delta = 0^\circ), \quad T_0 = T(\delta = 0^\circ). \quad (29 / 2)$$

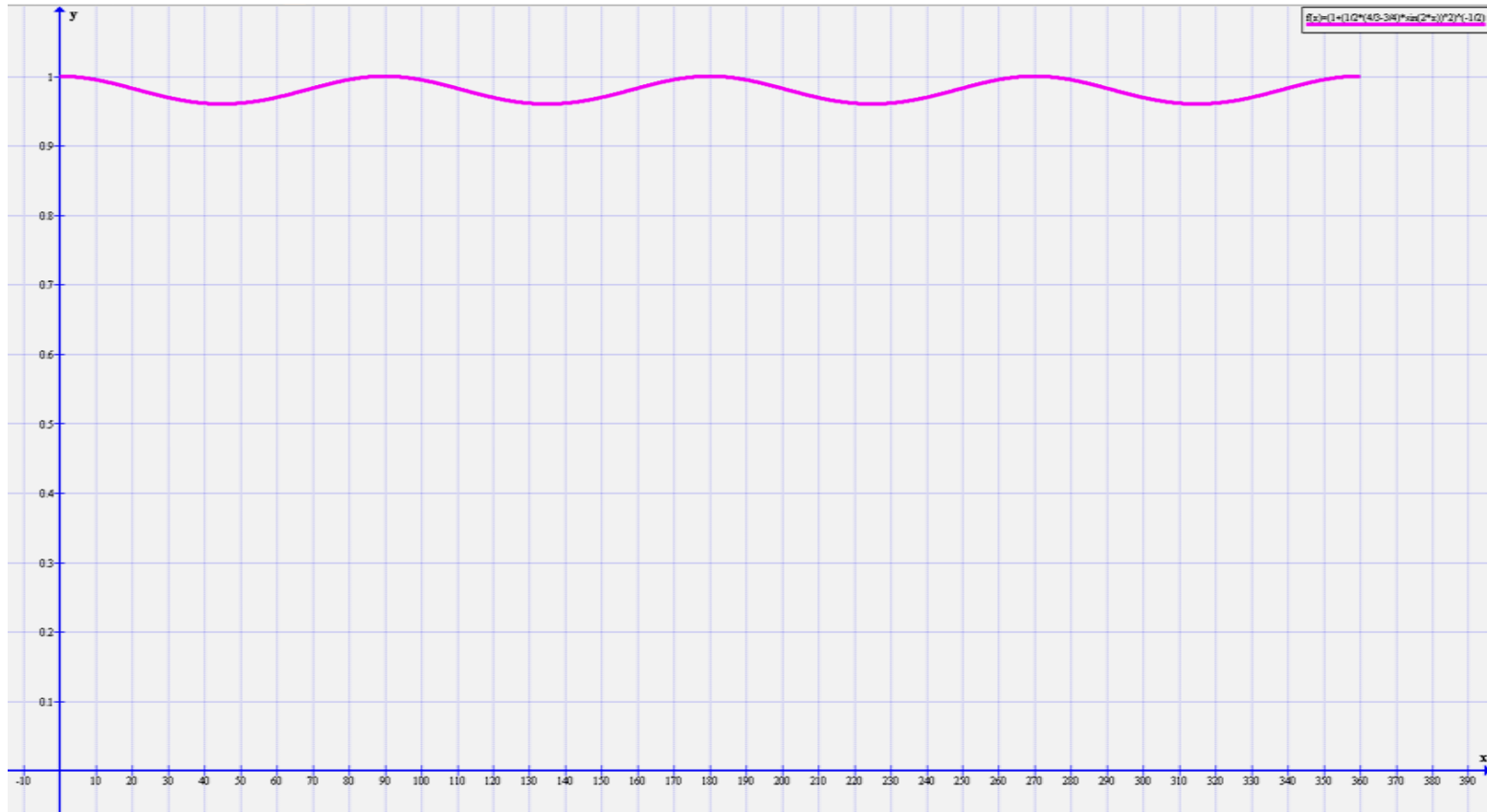
Adatok az ábrázoláshoz, az 1. ábrának is megfelelően:

$$a = 4 \text{ (cm)}, \quad b = 3 \text{ (cm)}. \quad (A)$$

Most $(26 / 2)$ és (A) - val:

$$f(\delta) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{4} \right) \cdot \sin(2 \cdot \delta) \right]^2}} . \quad (a)$$

Az (a) függvény lefutását a 2. ábra mutatja.



2. ábra

A 2. ábráról is leolvasható, hogy az $f(\delta)$ függvény viszonylag csekély változásokat mutat, így első pillantásra azt gondolhatná valaki, hogy sem d , sem T nem változik a δ szög változásával. Ez a vélekedés elvi hibához vezetne. A δ szögtől való függetlenség csak az $a = b = R$ speciális esetben áll elő. Ekkor:

$$d^* = \sqrt{2} \cdot R, \quad T^* = \frac{1}{2} \cdot R^2 . \quad (30)$$

Ez azt jelenti, hogy az R befogókkal bíró derékszögű háromszöget elforgathatjuk az O csúcsa körül, ami az eredményeket nem befolyásolja. A 2. ábra kapcsán is láttuk, hogy $a \neq b$ esetén az elforgatás csak a (25) szerinti elforgatási szögek esetében ad helyes eredményt.

A fenti kapcsolat lényege az r sugárral is megragadható; az 1. ábra szerint az OAB és az

OEF háromszögek területe:

$$T_{OAB} = T = T(\delta) = \frac{1}{2} \cdot d \cdot r, \quad T_{OEF} = T_0 = T(\delta = 0^\circ) = \frac{1}{2} \cdot d_0 \cdot r_0; \quad (31 / 1)$$

minthogy:

$$r = r_0, \quad (31 / 2)$$

így (11), (31 / 1) és (31 / 2) - vel is:

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\frac{1}{2} \cdot d \cdot r}{\frac{1}{2} \cdot d_0 \cdot r_0} = \frac{d}{d_0} \rightarrow \frac{T}{d} = \frac{T_0}{d_0} = \frac{\frac{a \cdot b}{2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{r}{2} = konst. \quad (32)$$

Ezek szerint az ellipszis **O** középpontjából derékszögben látszó **AB** húr és a hozzá tartozó **OAB** háromszög olyan tulajdonsággal bírnak, hogy az **OAB** háromszög **T** területének és az **AB** húr **d** hosszának aránya állandó, melynek értéke az **AB** szakasz egyenese által érintett kör **r** sugarának fele.

Az utóbbi mondatot akár az elején közölt tételhez kapcsolódó újabb tétel megfogalmazásának is tekinthetjük. Ezt és előzményeit már nem [1] - ből vettük, hanem „saját termés”.

M3. Az elején azt írtuk, hogy eddig még nem találkoztunk a bemutatott tétellel. E találkozás az tette lehetővé számunkra, hogy még „van” az [1] mű, akár csak gyenge minőségű másolatban is, az interneten. Örülünk, hogy ismét egy érdekes és színvonalas geometriai munkával találkozhattunk, melyet neves pedagógus - matematikusok szerkesztettek, immáron több mint fél évszázada, akár középiskolások számára is érthetővé téve a gyakran nem egyszerű mondanivalót.

Forrás:

[1] – Red.: **V. G. Boltjanskij ~ I. M. Jaglom:**

Enciklopedyija elementarnoj matyematyiki, 5. Knyiga: Geometrija
„Nauka”, Moszkva, 1966.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnök tanár

Szödliget, 2020. 11. 02.

Továbbiak: <https://galgoczi.net/>